

① Majme 2 nasledujúce vzťahy:

$$\sin(u+v) + \sin(x+y u) = 0$$

$$\sin(u-v) + \sin(x+y v) = 0$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $[0,0,0,0]$ funkcie φ_1, φ_2 v premenách x, y triedy C^∞ a pre ktoré platí $\varphi_1(0,0) = 0$, $\varphi_2(0,0) = 0$. Spočítajte $\frac{d\varphi_1}{dx}(0,0)$ a $\frac{d\varphi_2}{dy}(0,0)$.

$$f(x,y,u,v) = \sin(u+v) + \sin(x+y u)$$

$$g(x,y,u,v) = \sin(u-v) + \sin(x+y v)$$

$$G = \mathbb{R}^4$$

I.) Predpoklady vety o implicitných funkciách

a) sínus aj polynómy sú triedy C^∞ a zloženie funkcií C^∞ je C^∞ funkcia, takže $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$$b) f(0,0,0,0) = \sin(0+0) + \sin(0+0 \cdot 0) = 0$$

$$g(0,0,0,0) = \sin(0-0) + \sin(0+0 \cdot 0) = 0$$

c) Derivujeme podľa premenných, ktoré budeme vyjadrovať, čiže u a v :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{d}{du} f(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} f(x,y,u,v) \\ \frac{d}{du} g(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} g(x,y,u,v) \end{vmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{vmatrix} \cos(u+v) + \cos(x+y u) \cdot y & \cos(u+v) \\ \cos(u-v) & -\cos(u-v) + \cos(x+y v) \cdot y \end{vmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ & = \begin{vmatrix} 1+1 \cdot 0 & 1 \\ 1 & -1+0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_A = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

II.) Podľa vety o implicitných funkciách existuje

U okolie bodu $[x_0, y_0] = [0, 0]$ a v okolie body $[u_0, v_0] = [0, 0]$

také, že $\forall (y) \in U \exists! (u) : f(x, y, u, v) = 0$ & $g(x, y, u, v) = 0$

a k u označíme φ_1 a v označíme φ_2 , takže φ_1 & φ_2 sú triedy

$\mathcal{C}^0(U)$. Samozrejme $\varphi_1(0, 0) = u_0 = 0$, $\varphi_2(0, 0) = v_0 = 0$

III.) Derivácie, podľa x. Použijeme, že vektor parciálnych derivácií

je riešením nasledujúcej sústavy
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f & \frac{\partial}{\partial v} f \\ \frac{\partial}{\partial u} g & \frac{\partial}{\partial v} g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \cos(x + yu) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \cos(x + yv) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f & \frac{\partial}{\partial v} f \\ \frac{\partial}{\partial u} g & \frac{\partial}{\partial v} g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1, 1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(0, 0) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(0, 0) = 0$$

Derivácia podľa y.

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \cos(x + yu) \cdot u \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \cos(x + yv) \cdot v \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

□

② Majme nasledujúce 2 vzťahy:

$$e^{x+u} + e^{y+v} - 2 \cos(y+v) = 0$$

$$\log(1+x+u) + y \cdot \arctan(u+v) = 0$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $(0,0,0,0)$ funkcie

φ_1, φ_2 v premenných x, y triedy $\mathcal{C}^\infty$, pre ktoré platí

$$\varphi_1(0,0) = 0 = \varphi_2(0,0). \text{ Ďalej spočítajte } \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,0).$$

Potrebuje, že $1+x+u > 0$. Preto $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 1+x+u > 0 \right\}$ je otvorená množina, lebo $A(x,y,u,v) = 1+x+u$ je spojitá funkcia.

$$f(x,y,u,v) = e^{x+u} + e^{y+v} - 2 \cos(y+v)$$

$$g(x,y,u,v) = \log(1+x+u) + y \cdot \arctan(u+v)$$

I) Overíme predpoklady vety o implicitných funkciách:

a) exponenciála, kosínus, logaritmus aj $\arctan$ sú na G funkcie triedy $\mathcal{C}^\infty$ súčet a zloženie $\mathcal{C}^\infty$ funkcií je $\mathcal{C}^\infty$, takže f aj g sú $\mathcal{C}^\infty$ na G .

$$b) f(0,0,0,0) = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$g(0,0,0,0) = 0 + 0 \cdot \arctan(0) = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{du} f(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} f(x,y,u,v) \\ \frac{d}{du} g(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} g(x,y,u,v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x+u} & e^{y+v} + 2 \sin(y+v) \\ \frac{1}{1+x+u} + y \cdot \frac{1}{1+(u+v)^2} & y \cdot \frac{1}{1+(u+v)^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+2 \cdot 0 \\ 1+0 & 0 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

II.) Podľa vety o implicitných funkciách existuje

U okolie bodu $[x_0, y_0] = [0, 0]$ a v okolie bodu $[u_0, v_0] = [0, 0]$

také, že $\forall (x, y) \in U \exists! (u, v) : f(x, y, u, v) = 0$ & $g(x, y, u, v) = 0$

až u označíme φ_1 a v označíme φ_2 , takže φ_1 & φ_2 sú triedy $\varphi^0(u)$. Snadno vidíme $\varphi_1(0, 0) = u_0 = 0$, $\varphi_2(0, 0) = v_0 = 0$

III.) Derivácia podľa x:

(Ak sa s vami nekamarktia matice, vždy je možné to vyviesť cez vetiažkové pravidlo.)

$$\frac{d}{dx} f(x, y, u, v) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = e^{x+u} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\frac{d}{dx} g(x, y, u, v) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x+u} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) \\ \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) \\ \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) \\ \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

toto bezpečne vyriešite aj bez matric

zodpovedá to riešeniu sústavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) \\ \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{čo zodpovedá} \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) + 1 \cdot \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) = -1 \\ 1 \cdot \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) + 0 \cdot \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) = -1 \end{pmatrix}$$

Derivácia podľa y:

$$\left. \frac{d}{dy} f(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \left. \frac{d}{dy} (e^{x+u} + e^{y+v} - 2 \cos(y+v)) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \left. (e^{y+v} + 2 \sin(y+v)) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$\left. \frac{d}{dy} g(x, y, u, v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \left. \frac{d}{dy} (\log(1+x+u) + y \cdot \arctan(u+v)) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \left. \arctan(u+v) \right|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \arctan(0+0) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \varphi_1(0,0) = 0 \quad \frac{d}{dy} \varphi_2(0,0) = -1$$



③ Majme nasledujúce 2 vzťahy:

$$\frac{4}{\pi} \arctg(u+xu) + v \cdot \arctg(yv) = 1$$

$$\cos(xu + yv) + e^{xv} = 2v^2$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $(0,0,1,1)$ funkcie

φ_1, φ_2 v premenných x, y triedy C^∞ , pre ktoré platí

$$\varphi_1(0,0) = 1 = \varphi_2(0,0). \text{ Ďalej spočítajte } \frac{d\varphi_1}{dx}(0,0) \text{ a } \frac{d\varphi_2}{dy}(0,0).$$

G môžeme voliť $\mathbb{R}^4$.

$$f(x,y,u,v) = \frac{4}{\pi} \arctg(u+xu) + v \cdot \arctg(yv) - 1$$

$$g(x,y,u,v) = \cos(xu + yv) + e^{xv} - 2v^2$$

I.) Overujeme podmienky vety o implicitných funkciách.

a) $\arctg$, $\cos$ a exponenciála sú C^∞ funkcie, polynóm je C^∞ funkcia a zloženie C^∞ funkcií je C^∞ funkcia.

$$b) f(0,0,1,1) = \frac{4}{\pi} \arctg(1+0.1) + 1 \cdot \arctg(0.1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$g(0,0,1,1) = \cos(0+0) + 1 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} \frac{d}{du} f(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} f(x,y,u,v) \\ \frac{d}{du} g(x,y,u,v) & \frac{d}{dv} g(x,y,u,v) \end{vmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{vmatrix} \frac{4}{1+(u+xu)^2} & \arctg(yv) + \frac{vg}{1+(yv)^2} \\ -\sin(xu+yv) \cdot x & -\sin(xu+yv) \cdot y + e^{xv} - 4v \end{vmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{4}{1+1^2} & 0+0 \\ 0 & 0+0-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2 \neq 0$$

II.) Podľa vetý o implicitných funkciách existuje

U okolie bodu $[x_0, y_0] = [0, 0]$ a V okolie bodu $[u_0, v_0] = [1, 1]$

také, že $\forall (y) \in U \exists! (v) : f(x, y, u, v) = 0$ & $g(x, y, u, v) = 0$

a u označíme φ_1 a v označíme φ_2 , takže φ_1 & φ_2 sú triedy

$\varphi^0(u)$. Snadno vidíme $\varphi_1(0, 0) = u_0 = 1$, $\varphi_2(0, 0) = v_0 = 1$.

III.) Derivácie podľa x :

$$\frac{d}{dx} f(x, y, u, v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{u}{1 + (u + xv)^2} \right) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{d}{dx} g(x, y, u, v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = (-\sin(xu + yv) \cdot u + e^{xv} \cdot v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\pi} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{\pi} \\ +\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \varphi_1(0, 0) = -\frac{4}{\pi} \quad \frac{d}{dx} \varphi_2(0, 0) = +\frac{1}{4}$$

Derivácie podľa y :

$$\frac{d}{dy} f(x, y, u, v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \left(\frac{v \cdot v}{1 + (yv)^2} \right) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\frac{d}{dy} g(x, y, u, v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = (-\sin(xu + yv) \cdot v) \Big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \varphi_1(0, 0) = -2 \quad \frac{d}{dy} \varphi_2(0, 0) = 0$$

